Висловлювання.

Висловлювання

Висловлюванням називається речення, про яке можна сказати, істинне воно чи хибне.

З такого неформального означення випливає, що речення «Котра година?» або «Ура!» не є висловлюваннями, а речення «$2+2=4$» і «трикутники мають чотири сторони» є висловлюваннями: перше з них істинне, а друге – хибне.

Неоднозначність висловлювань у реальному житті

Але у реальному житті не завжди можна чітко визначити, чи є речення висловлюванням: за формою воно може бути нібито й висловлюванням, а от щодо його істинності – не все зрозуміло. Це є наслідком того, що речення виражені природною мовою, яка тяжіє до неоднозначності, точніше, до багатозначності. Такі проблеми вивчаються, зокрема, лінгвістикою і психологією.

Приклади висловлювань, які можна розуміти по-різному:

— Я проїхав зупинку.

— Вчора ми переобрали декана.

— Чоловіку зраджувати не можна.

Неоднозначність часто використовується в рекламі, анекдотах і т.д.:

— З нашим взуттям ви не розлучитеся ніколи (*підпис під зображенням чоловіка і жінки у черевиках, які зв'язані шнурками*).

Наступний приклад показує, що додавання частки «не» може й не змінити зміст висловлювання:

— «Чайник довго закипає» = «Чайник довго не закипає».

Далі ми будемо розглядати висловлювання на математичні теми; будемо сподіватися, що їхній зміст буде точний і однозначно зрозумілий.

У математичній логіці не цікавляться змістом висловлювання; важливо лише його значення – істина або брехня. Підкреслимо ще раз, що для кожного висловлювання маємо вибір лише з двох можливостей: або висловлювання істинне, або воно хибне; третього варіанту не буває.

Логічні операції

З одних висловлювань можна отримувати інші за допомогою логічних операцій. Ми будемо позначати висловлювання латинськими буквами, а істину і брехню будемо позначати 1 і 0 (інший варіант: можна використовувати, наприклад, букви T і F – від англійських слів True і False).

Якщо у нас є два висловлювання A і B, то ми можемо отримати складне висловлювання, якось поєднавши A і B. Приклад: два істинних висловлювання «$2+2=4$» і «$2\times 2=4$» можна об'єднати в одне, теж істинне висловлювання «$2+2=4$ та $2\times 2=4$». Тут «та» – це логічна операція або логічна зв'язка: вона зв'язує два простих висловлювання в одне складне.

Розглянемо кілька загальновживаних логічних операцій.

Заперечення

Найпростіша операція – заперечення. Вона перетворює істинне висловлювання на хибне, а хибне – на істинне. Якщо A – висловлювання, то його заперечення позначається як $\overline{A}$ або $\neg A$. Оскільки нас не цікавить зміст висловлювання, а цікавить лише його значення (істина-брехня), то для того, щоб описати дію заперечення, достатньо вказати наступну таблицю (такі таблиці називаються таблицями істинності):

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Для того, щоб застосувати операцію заперечення до конкретного висловлювання, можна діяти так: спочатку сказати «Неправда, що», а далі повторити саме висловлювання. Але для того, щоб далі працювати з цим запереченням, буває корисно переказати його по-іншому. Приклади:

A	$\overline{A}$
$2+2=4$.	Неправда, що $2+2=4$. *По-іншому*: $2+2\neq 4$.
$a<b$.	Неправда, що $a<b$. *По-іншому*: $a\geq b$.

(Якщо ми не знаємо, чому точно дорівнюють a і b, то речення «$a<b$» є не висловлюванням, а предикатом; ми обговоримо предикати пізніше.)

Нагадаємо ще чотири логічних операції, які з'єднують два висловлювання:

Кон'юнкція і диз'юнкція

Кон'юнкція («та»)

A	B	$A\wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Диз'юнкція («або»)

A	B	$A\vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Тобто для істинності кон'юнкції $A\wedge B$ повинні бути істинними обидва висловлювання A й B, а для істинності диз'юнкції $A\vee B$ – хоча б одне з цих висловлювань.

Імплікація і еквівалентність

Імплікація

(Якщо..., то...)

A	B	$A\Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Еквівалентність

(...тоді і тільки тоді, коли...)

A	B	$A\Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Складне висловлювання $A\Leftrightarrow B$ істинне, коли обидва висловлювання A й B мають однакове значення (обидва істинні або обидва хибні), що приблизно відповідає нашому уявленню про еквівалентність.

Пояснення щодо імплікації

Найбільші питання виникають у зв'язку з означенням імплікації (тобто слідування). А саме, якщо висловлювання A хибне, то висловлювання $A\Rightarrow B$ вважається істинним. Кажуть: «з брехні випливає що завгодно». Для того, щоб пояснити це означення, наведемо приклад.

Викладач сказав: «Якщо студент буде знати матеріал добре, я поставлю йому хорошу оцінку».

Є чотири можливості:

(1) студент знав матеріал добре і отримав хорошу оцінку;

(2) студент знав матеріал добре і отримав погану оцінку;

(3) студент знав матеріал погано і отримав хорошу оцінку;

(4) студент знав матеріал погано і отримав погану оцінку.

В якому разі ми можемо звинуватити викладача в тому, що він збрехав? Лише у випадку (2): викладач пообіцяв, що якщо студент буде знати матеріал добре, то отримає хорошу оцінку. А студент отримав погану оцінку. Тож, викладач збрехав.

Чи можемо ми звинуватити викладача у брехні у випадках (3) і (4)? Ні, тому що на випадок, коли студент знатиме матеріал погано, викладач нічого не обіцяв. Тож він і не збрехав. А якщо не збрехав, то сказав правду, адже у математичній логіці третього варіанту немає.

Властивості логічних операцій

Наведемо деякі властивості логічних операцій, введених вище.

1. Комутативність операцій $\wedge$ і $\vee$:

Комутативність $\wedge$ і $\vee$

$$A \wedge B = B \wedge A,$$

$$A \vee B = B \vee A.$$

Ці рівності ми розуміємо так: при одних і тих самих значеннях A і B формули зліва і справа від позначки «=» мають одне й те саме значення. (Далі буде пояснено, що ці рівності є рівностями булевих функцій.) А саме, якщо скласти таблицю істинності, наприклад, для $A \wedge B$ і для $B \wedge A$, то таблиці будуть однаковими. Це легко зробити; не будемо наводити ці таблиці тут.

Зауваження. Ці властивості можна виразити інакше. Наприклад, можна сказати, що висловлювання $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ завжди істинне, незалежно від значень змінних A і B. Такі висловлювання називаються тавтологіями. Тож властивості, які ми наведемо, можна сформулювати як набір тавтологій. Ми не будемо тут цього робити.

2. Асоціативність операцій $\wedge$ і $\vee$:

Асоціативність $\wedge$ і $\vee$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C),$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C).$$

Ці рівності означають, що коли у формулі зустрічаються дві однакові операції $\wedge$ або $\vee$, то можна не ставити дужки.

Зауваження. Ми ставимо дужки всюди, де може виникнути непорозуміння.

3. Дистрибутивність для операцій $\wedge$ і $\vee$:

Дистрибутивність для $\wedge$ і $\vee$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad (1)$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Доведемо першу з цих рівностей, тобто рівність (1); друга рівність доводиться аналогічно. Для цього складемо таблицю істинності. Спочатку отримаємо таблицю для формули $A \wedge (B \vee C)$, а потім – для формули $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Будемо будувати таблицю для формул по кроках:

A	B	C	$B \vee C$	$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	1	1	**1**	0	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

Тепер треба порівняти 5-й і 8-й стовпчики, які й задають формули $A \wedge (B \vee C)$ і $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Бачимо, що стовпчики однакові, тобто й формули приймають рівні значення при однакових значеннях змінних.

4. Закони де Моргана:

Закони де Моргана

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B),$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B).$$

Альтернативний запис:

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B},$$

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}.$$

Доведення легко отримати за допомогою таблиць істинності; ми не будемо тут цього робити.

5. Подвійне заперечення:

Подвійне заперечення

$$\neg(\neg A) = A.$$

Доведення очевидне.

6. Імплікація через інші операції:

Імплікація через інші операції

$$(A \Rightarrow B) = (\neg A) \vee B. \tag{2}$$

Ця властивість дозволяє переписати операцію імплікації через інші логічні операції. Її легко довести за допомогою таблиць істинності. Продемонструємо інший, трошки коротший шлях доведення, який часто буває зручним.

Подивимось на ліву частину рівняння (2). Коли висловлювання $A \Rightarrow B$ брехня? Лише коли $A = 1$ і $B = 0$. В решті випадків це правда.

Тепер подивимось на праву частину рівняння. Коли висловлювання $(\neg A) \vee B$ брехня? Лише коли $\neg A = 0$ і $B = 0$, тобто коли $A = 1$ і $B = 0$. В решті випадків це правда.

Таким чином, ліва і права частини рівності набувають значення 0 і 1 при одних і тих самих значеннях змінних, що й треба було довести.

Булеві функції

Булеві функції

Вираз $A \vee B$ можна сприймати як функцію від двох змінних A і B. Кожна змінна може приймати значення 0 або 1, і сама функція теж приймає значення 0 або 1. Такі функції називається булевими (на честь англійського математика Джорджа Буля). Наприклад, функція $f(A) = \overline{A}$ – це булева функція одної змінної, $f(A, B) = A \vee B$ – булева функція двох змінних, $f(A, B, C) = (A \vee B) \wedge C$ – булева функція трьох змінних і так далі.

Булева функція може приймати одне й те саме значення (0 або 1) при всіх значеннях змінних. В такому разі її можна назвати (логічною) константою. Зрозуміло, що існує лише дві логічні константи – 0 і 1.

Булеву функцію можна задати її таблицею істинності. Іншими словами, щоб задати булеву функцію, треба вказати, яке значення (0 чи 1) вона приймає на кожному з усіх можливих наборів значень її змінних. Дві функції однакові, якщо їх значення на всіх можливих наборах змінних збігаються. Рівність між булевими функціями позначатимемо знаком «=». Отже, властивості логічних операцій, розглянуті вище, можна інтерпретувати як рівності булевих функцій.

Опис булевої функції, рівність двох булевих функцій

Якщо змінних n, то існує 2^n можливих наборів їх значень, а отже, існує 2^{2^n} різних булевих функцій від n змінних. Наприклад, перерахуємо всі булеві функції від однієї змінної. Їх чотири, причому дві з них насправді не залежать від змінної, тобто є константами:

A	$f(A) = A$	$f(A) = \overline{A}$	$f(A) = 0$	$f(A) = 1$
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1

Надмірність логічних операцій

Як ми щойно бачили, імплікацію можна виразити через заперечення і диз'юнкцію. З законів де Моргана і властивості подвійного заперечення випливає, що кон'юнкцію теж можна виразити через заперечення і диз'юнкцію. Справді, маємо $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$. Візьмемо заперечення обох частин рівності і використаємо властивість подвійного заперечення; отримуємо: $A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$.

Аналогічно диз'юнкцію можна виразити через заперечення і кон'юнкцію, а отже, імплікацію теж можна виразити через заперечення і кон'юнкцію.

За допомогою таблиць істинності легко показати, що

$$(A \Leftrightarrow B) = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

А отже, еквівалентність теж можна виразити через $\neg$, $\vee$ або через $\neg$, $\wedge$.

На прикладі покажемо, як будь-яку булеву функцію можна виразити через $\neg$, $\vee$ і $\wedge$. Наприклад, нехай функції $f(A, B)$ і $g(A, B)$ задаються такими таблицями істинності

Довільна булева функція виражається через $\neg$, $\vee$, $\wedge$

A	B	$f(A, B)$	$g(A, B)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Функція $f(A, B)$ дорівнює 1 лише при $A = 0$, $B = 1$, тобто коли обидва висловлювання $\overline{A}$ і B істинні. Отже, $f(A, B) = \overline{A} \wedge B$.

Функція $g(A, B)$ дорівнює 1 у двох випадках: коли $A = 0$, $B = 1$ або коли $A = 1$, $B = 0$. Отже, $g(A, B) = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$.

Якщо у стовпчику, що задає функцію, одиничок більше, ніж нулів, то можна міркувати по-іншому: спочатку задати функцію $\overline{f(A, B)}$, а потім взяти заперечення виразу, що вийшов.

Для функцій-констант, тобто функцій, які тотожно дорівнюють 0 або 1, можна запропонувати такі вирази: $A \vee \overline{A} = 1$, $A \wedge \overline{A} = 0$.

Аналогічно можна міркувати для будь-якої булевої функції довільної кількості змінних. Таким чином, будь-яку булеву функцію можна виразити через дві операції: $\neg$, $\vee$ або $\neg$, $\wedge$.

Виникає питання: чи можна обійтися одною операцією? Так, можна, причому тут є два варіанти.

Розглянемо дві наступні операції:

Штрих Шеффера і стрілка Пірса

Штрих Шеффера

A	B	$A\vert B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Стрілка Пірса

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Зауваження. Штрих Шеффера позначається вертикальною рискою – так само, як знак подільності в алгебрі. Але означає він зовсім інше!

Легко виразити штрих Шеффера через $\neg$ і $\vee$ або через $\neg$ і $\wedge$: отримуємо $A|B = \overline{A} \vee \overline{B} = \overline{A \wedge B}$. А чи можна навпаки — виразити $\neg$, $\vee$, $\wedge$ через штрих Шеффера? Так, можна. Спочатку виразимо заперечення. Легко перевірити, що

Заперечення і кон'юнкція виражаються через штрих Шеффера

$$\overline{A} = A|A.$$

А тепер до обох частин виписаної вище рівності $A|B = \overline{A \wedge B}$ застосуємо заперечення: $\overline{A|B} = A \wedge B$. Отже,

$$A \wedge B = (A|B)|(A|B).$$

Зауважимо, що штрих Шеффера не є асоціативною операцією: неважко показати, що $(A|B)|C \neq A|(B|C)$. Справді, $(0|1)|1 = 1|1 = 0$, але $0|(1|1) = 0|0 = 1$. Тож дужки треба писати обов'язково. Тепер, застосовуючи закон де Моргана, можна виразити $\vee$ через штрих Шеффера, а отже, і всі інші булеві функції.

Таким чином, будь-яку логічну операцію можна виразити за допомогою одної – штриха Шеффера. Аналогічно можна показати, що будь-яку логічну операцію можна виразити за допомогою лише стрілки Пірса.

Пряма, обернена і протилежна теореми

Багато математичних теорем мають вигляд імплікації $A \Rightarrow B$, тобто стверджують, що з виконання певних умов випливають певні наслідки. Висловлювання A – це умова або засновок, а висловлювання B – висновок.

Іноді у формулюванні теореми немає слів «якщо..., то...», але її можна переформулювати так, щоб ці слова з'явилися. Наприклад, теорему «Добуток коренів рівняння $x^2 + bx + c = 0$ дорівнює c» можна переформулювати так:

— Якщо x_1 і x_2 – два різні корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то $x_1 x_2 = c$.

Або так:

— Нехай x_1 і x_2 – два різні корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$. Тоді $x_1 x_2 = c$.

В будь-якому разі умова A — це «x_1 і x_2 – два різні корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$», а висновок B — це «$x_1 x_2 = c$».

Отже, нехай теорема має вигляд $A \Rightarrow B$. Використовуючи висловлювання A і B, можна отримати чотири формулювання, вказаних нижче:

Пряма, обернена і протилежна теореми

- $A \Rightarrow B$ — пряма теорема;
- $B \Rightarrow A$ — обернена теорема;
- $\neg A \Rightarrow \neg B$ — протилежна теорема;
- $\neg B \Rightarrow \neg A$ — протилежна до оберненої (обернена до протилежної) теорема.

Приклад:

— пряма теорема: «Якщо x_1 і x_2 – два різні корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то $x_1 x_2 = c$» (правильна);

— обернена: «Якщо $x_1 x_2 = c$, то x_1 і x_2 – два різні корені рівняння $x^2+bx+c = 0$» (неправильна);

— протилежна: «Якщо x_1 і x_2 не є двома різними коренями рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то $x_1 x_2 \neq c$» (неправильна);

— протилежна до оберненої: «Якщо $x_1 x_2 \neq c$, то x_1 і x_2 не є двома різними коренями рівняння $x^2 + bx + c = 0$» (правильна).

Неважко довести, що й у загальному випадку пряма і протилежна до оберненої теореми правильні або неправильні одночасно. Аналогічно, обернена і протилежна теореми правильні або неправильні одночасно:

$$(A \Rightarrow B) \ = \ (\neg B \Rightarrow \neg A),$$

$$(B \Rightarrow A) \ = \ (\neg A \Rightarrow \neg B).$$

Якщо пряма і обернена теореми обидві правильні (тобто $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$ істинні), то $A \Leftrightarrow B$, тобто висловлювання A і B еквівалентні. В такому разі теорему формулюють так: «умова A виконана тоді і тільки тоді, коли виконана умова B».

Необхідні і достатні умови

Теорему «$A \Rightarrow B$» часто формулюють з використанням слів «необхідна умова», «достатня умова». А саме, якщо правильно, що $A \Rightarrow B$, то кажуть, що:

Необхідні і достатні умови

- A — достатня умова для B;
- B — необхідна умова для A.

Якщо умови A і B еквівалентні, тобто $A \Leftrightarrow B$, то кажуть, що «A є необхідною і достатньою умовою для B».

Приклад: теорему про корені рівняння, наведену вище, можна сформулювати так:

- Для того, щоб виконувалася рівність $x_1 x_2 = c$, достатньо, щоб x_1 і x_2 були двома різними коренями рівняння $x^2 + bx + c = 0$.
- Для того, щоб x_1 і x_2 були двома різними коренями рівняння $x^2 + bx + c = 0$, необхідно, щоб $x_1 x_2 = c$.

Як застосувати таку теорему в конкретній ситуації?

Якщо якісь два різні числа дійсно є коренями рівняння $x^2 + bx + c = 0$ (виконана достатня умова), то їх добуток точно дорівнює c.

Якщо взяти просто якісь два числа, то їх добуток може дорівнювати c, а може і не дорівнювати. З теореми, сформульованої вище, у такому випадку ніякого висновку зробити не можна.

Якщо добуток якихось різних чисел не дорівнює c (необхідна умова не виконана), то принаймні одне з цих чисел не є коренем рівняння $x^2 + bx + c = 0$.

Якщо добуток якихось різних чисел дорівнює c (необхідна умова виконана), то ці числа можуть бути коренями рівняння $x^2 + bx + c = 0$, а можуть і не бути. Тобто зробити висновок з теореми в такому разі неможливо.

Предикати

Часто ми маємо справу з реченнями, які виглядають як висловлювання, але містять параметри, тобто змінні. Приклад: $x > 1$. Ми не можемо сказати, істина це чи ні, поки не знаємо, чому дорівнює x. Але для кожного дійсного x ми можемо сказати, задовольняє цей x дану нерівність чи ні. Отже, нерівність $x > 1$ породжує функцію, аргументом якої є дійсне число, а значенням – істина або брехня (1 або 0).

Такі функції називаються предикатами. Предикат може залежати від декількох змінних. Приклади: Предикати

— «$x > y$» (предикат заданий на множині пар дійсних чисел);

— «$a + b = c$» (предикат заданий на множині трійок цілих чисел);

— «трикутник x рівнобедрений» (предикат заданий на множині трикутників на площині).

Кількість параметрів називається арністю (місністю) предиката: предикати з одною змінною називаються унарними (одномісними), з двома змінними – бінарними (двомісними), з трьома – тернарними (тримісними), з n змінними – n-арними (n-місними).

Множина, якій належать змінні, називається предметною областю предиката (тобто предметна область – це область визначення предиката). Коли предикат задається, то він задається разом із своєю предметною областю. Приклад: предикат $x > 0$, заданий на множині $\mathbb{N}$, істинний на всій предметній області, а такий самий предикат, заданий на множині $\mathbb{Z}$, на частині допустимих значень x є хибним.

Для більш формального введення поняття предикату нагадаємо, що $A \times B$ означає декартів добуток множин A і B, тобто множину упорядкованих пар (a, b), де $a \in A$, $b \in B$: Декартів добуток

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Аналогічно вводиться декартів добуток довільної (скінченної) кількості множин:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Далі вважатимемо, що ці множини непорожні.

Означення: n-місний (або n-арний) предикат P з предметною областю $A_1 \times \cdots \times A_n$ – це функція $P : A_1 \times \cdots \times A_n \to \{0, 1\}$. Тут множина $\{0, 1\}$ інтерпретується як множина логічних значень «брехня» і «істина». Означення предикату

Тобто якщо підставляти в предикат конкретні значення змінних, отримаємо висловлювання, про які можна сказати, істинні вони чи хибні.

Зауваження. Іноді зручно висловлювання вважати нуль-місним предикатом.

Приклад. Нехай предикат $P(x) = \ ''x > 0''$ заданий на множині $\mathbb{R}$ (тут і далі лапки використані для того, щоб було зручніше прочитати запис предиката). Тоді, підставляючи конкретні числа замість x, отримуємо висловлювання:

$$P(2) = \ ''2 > 0'' \text{ – правда, тобто } P(2) = 1,$$

$$P(-2) = \ ''-2 > 0'' \text{ – неправда, тобто } P(-2) = 0.$$

Приклад. Нехай $Q(x, y) = \ ''x > y''$ заданий на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Тоді, підставляючи конкретні числа замість x і y, можна отримати такі висловлювання:

$$Q(2, 1) = \ ''2 > 1'' \text{ – правда, тобто } Q(2, 1) = 1,$$

$$Q(2, 2) = \ ''2 > 2'' \text{ – неправда, тобто } Q(2, 2) = 0.$$

Квантори

Для заданого предиката буває цікаво дізнатися, чи правда, що:

(а) предикат істинний при всіх допустимих значеннях змінних;

(б) існує хоча б один набір значень змінних, на яких предикат істинний.

У пунктах (а) і (б) записані висловлювання: адже про кожне з них ми точно можемо сказати, істинне воно чи хибне.

Квантори

Прийнято записувати такі висловлювання за допомогою позначок, які називаються кванторами: $\forall$ – квантор загальності і $\exists$ – квантор існування. Квантор $\forall$ читається «всі», «довільні», «будь-які», «кожний» а іноді – із прийменниками: «для всіх», «для довільного». Квантор $\exists$ читається «існує», «є», «знайдеться», а іноді – «є хоча б один». Якщо предикат $P(x)$ заданий на предметній області M, то пункти (а) і (б), подані вище, можна переписати як

(а) $\forall x \in M \quad P(x)$;

(б) $\exists x \in M \quad P(x)$.

Приклад:

(а) $\forall x \in \mathbb{N} \ \ x > 0$.

Це висловлювання (воно істинне) можна прочитати так: «для всіх натуральних чисел x виконується нерівність $x > 0$». Або так: «довільне натуральне число x задовольняє умову $x > 0$». Або так: «кожне натуральне число є додатним».

Приклад:

(б) $\exists x \in \mathbb{N} \ \ x > 0$.

Це висловлювання (воно теж істинне) можна прочитати так: «існує натуральне число, яке є додатним». Або так: «існує додатне натуральне число».

Зауваження. Якщо предметна область предиката фіксована або зрозуміло з контексту, яка вона, то у виразах з кванторами її не пишуть. Тоді ці вирази мають вигляд

$$\forall x \ P(x); \qquad \exists x \ P(x).$$

Квантори та кон'юнкція / диз'юнкція

Зауваження. Якщо предметна область скінченна, $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то висловлювання (а) і (б) можна записати так:

(а) $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$;

(б) $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)$.

У цьому сенсі предикат загальності є узагальненням кон'юнкції, а предикат існування є узагальненням диз'юнкції.

Таким чином, предикат можна перетворити на висловлювання двома способами: підставити в нього конкретні значення змінних або навісити квантори (квантифікувати).

Як перетворити предикат на висловлювання

Розглянемо тепер двомісний предикат $Q(x, y)$, визначений на множині $A \times B$. Якщо навісити квантор лише на одну зі змінних, отримаємо одномісний предикат.

Приклад: якщо двомісний предикат $P(x, y) = \ ''x < y''$ визначений на множині $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, то предикат

$$Q(y) = \ ''\exists x \in \mathbb{N} \ \ x < y''$$

одномісний. Дійсно, якщо підставити конкретні значення y, отримаємо висловлювання:

$Q(1) = \ ''\exists x \in \mathbb{N} \ \ x < 1''$ – неправда (неправда, що існує натуральне число, яке менше 1), тобто $Q(1) = 0$;

$Q(2) = \ ''\exists x \in \mathbb{N} \ \ x < 2''$ – правда (існує натуральне число, яке менше 2, – наприклад, 1), тобто $Q(2) = 1$.

Якщо ж навісити квантори на обидві змінні, отримаємо висловлювання (нульмісний предикат). Наприклад, таке:

$$\forall y \in \mathbb{N} \ \ \exists x \in \mathbb{N} \ \ x < y$$

(це висловлювання хибне).

Аналогічно у загальному випадку: якщо на k змінні n-місного предиката навісити квантори, то отримаємо $(n - k)$-місний предикат. Змінні, на які навішані квантори, називаються зв'язаними. Решта змінних називаються вільними.

Вільні і зв'язані змінні

Зауваження. Якщо змінна зв'язана, то її позначення можна змінити (в усіх місцях у виразі, де вона зустрічається), і зміст виразу не зміниться. Приклад:

$$''\exists x \in \mathbb{N} \ \ x < y'' \ = \ ''\exists a \in \mathbb{N} \ \ a < y''.$$

Заперечення виразів з кванторами

Розглянемо висловлювання $\exists x{\in}A \ P(x)$ (тут множина A – предметна область предиката P). Що означає його заперечення? «Неправда, що $\exists x{\in}A \ P(x)$». Тобто неправда, що існує такий $x \in A$, для якого $P(x)$ істина. Іншими словами, для всіх $x \in A$ висловлювання $P(x)$ хибне. Це можна виразити так: для всіх $x \in A$ висловлювання $\overline{P(x)}$ істинне. Отже,

Заперечення виразу з квантором $\exists$

$$\overline{\exists x{\in}A \ \ P(x)} = \forall x{\in}A \ \ \overline{P(x)}.$$

Аналогічно розглянемо висловлювання $\forall x{\in}A \ P(x)$. Що означає його заперечення? «Неправда, що $\forall x{\in}A \ P(x)$». Тобто неправда, що для всіх $x \in A$ висловлювання $P(x)$ істинне. Тобто знайдеться таке $x \in A$, для якого $P(x)$ хибне. Іншими словами, знайдеться таке $x \in A$, для якого $\overline{P(x)}$ істинне. Отже,

Заперечення виразу з квантором $\forall$

$$\overline{\forall x{\in}A \ \ P(x)} = \exists x{\in}A \ \ \overline{P(x)}.$$

Приклад. Нехай предикат $P(x) = \ ''x^2 + 1 = 0''$ заданий на множині дійсних чисел. Розглянемо (хибне) висловлювання

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \ x^2 + 1 = 0.$$

Воно стверджує, що існує таке дійсне число x, для якого $x^2 + 1 = 0$. Побудуємо його заперечення. Що означає, що це неправда? Що такого числа не існує. Але як висловити це без частки «не»? Можна сказати, що для всіх чисел вказана рівність не виконується:

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; x^2 + 1 \neq 0.$$

Приклад. Нехай предикат $P(x) = \;''x > 5''$ заданий на множині дійсних додатних чисел. Розглянемо (хибне) висловлювання

$$\forall x > 0 \;\; x > 5.$$

(Зауважимо, що тут нерівності $x > 0$ і $x > 5$ мають різний зміст: нерівність $x > 0$ описує предметну область предиката, а нерівність $x > 5$ описує сам предикат.) Це висловлювання стверджує, що довільне додатне число більше 5. Побудуємо його заперечення. Що означає, що це неправда? Що не всі додатні числа більші 5. Тобто є такі додатні числа, які не більші 5:

$$\exists x > 0 \;\; x \leq 5.$$

Звернемо увагу на те, що перша нерівність $x > 0$ залишилася незмінною, тому що предметна область предиката $P(x)$ не змінилася. А друга нерівність $x \leq 5$ змінилася на протилежну, тому що умова $P(x)$ змінилася на умову $\overline{P(x)}$.

Заперечення виразу з двома кванторами

Тепер розглянемо вирази з двома кванторами. Наприклад, нехай предикат $Q(x, y)$ заданий на множині $A \times B$. Розглянемо висловлювання

$$\exists x{\in}A \; \forall y{\in}B \;\; Q(x, y). \tag{5}$$

Як було пояснено вище, вираз $''\forall y{\in}B \; Q(x, y)''$ – це одномісний предикат від змінної x. Тобто висловлювання (5) має структуру $\exists x{\in}A \; P(x)$, де $P(x) ='' \forall y{\in}B \; Q(x, y)''$:

$$\exists x{\in}A \; \forall y{\in}B \;\; Q(x, y) \;\; = \;\; \exists x{\in}A \; P(x).$$

Тепер побудуємо його заперечення. На першому кроці запишемо заперечення виразу з квантором $\exists$:

$$\overline{\exists x{\in}A \; P(y)} = \forall x{\in}A \;\; \overline{P(x)},$$

тобто

$$\overline{\exists x{\in}A \; \forall y{\in}B \;\; Q(x, y)} = \forall x{\in}A \;\; \overline{\forall y{\in}B \;\; Q(x, y)}.$$

А тепер запишемо заперечення виразу з квантором $\forall$:

$$\overline{\forall y{\in}B \;\; Q(x, y)} \;\; = \;\; \exists y{\in}B \;\; \overline{Q(x, y)}.$$

Як наслідок, отримуємо заперечення виразу з двома кванторами:

$$\overline{\exists x{\in}A \; \forall y{\in}B \;\; Q(x, y)} \;\; = \;\; \forall x{\in}A \; \exists y{\in}B \;\; \overline{Q(x, y)}.$$

Аналогічно отримуємо заперечення виразів з будь-якою кількістю кванторів.

Приклад. Запишемо означення того, що число 0 є границею послідовності $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0{\in}\mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; |\tfrac{1}{n}| < \varepsilon. \tag{5}$$

(Це правда.) Тепер запишемо заперечення цього висловлювання. Заперечення означатиме, що 0 не є границею цієї послідовності (це неправда).

У нашому виразі три квантори. Отже, треба повторити описані вище кроки тричі.

1) Наше висловлювання має структуру $''\forall\varepsilon > 0\ P(\varepsilon)''$, отже, заперечення має вигляд $''\exists\varepsilon > 0\ \overline{P(\varepsilon)}''$.

2) Предикат $\overline{P(\varepsilon)}$ має структуру $''\exists n_0{\in}\mathbb{N}\ Q(\varepsilon, n_0)''$. Отже, його заперечення має вигляд $''\forall n_0{\in}\mathbb{N}\ \overline{Q(\varepsilon, n_0)}''$.

3) Предикат $\overline{Q(\varepsilon, n_0)}$ має структуру $''\forall n \geq n_0\ R(\varepsilon, n_0, n)''$. Отже, його заперечення має вигляд $''\exists n \geq n_0\ \overline{R(\varepsilon, n_0, n)}''$.

Нарешті, предикат $R(\varepsilon, n_0, n)$ має вигляд $R(\varepsilon, n_0, n) = ''|\frac{1}{n}| < \varepsilon''$. Зауважимо, що змінна n_0 входить в опис предметної області цього предикату, адже розглядаються лише $n \geq n_0$. Заперечення $\overline{R(\varepsilon, n_0, n)}$ можна записати як $''|\frac{1}{n}| \geq \varepsilon''$.

Збираючи все до купи, отримуємо заперечення висловлювання (5):

$$\exists\varepsilon > 0\ \ \forall n_0{\in}\mathbb{N}\ \ \exists n \geq n_0\ \ |\tfrac{1}{n}| \geq \varepsilon.$$

Оскільки висловлювання (5) істинне, то отримане заперечення хибне.

Заперечення висловлювань з кванторами і закони де Моргана

Зауваження. Як було пояснено вище, предикат загальності є узагальненням кон'юнкції, а предикат існування є узагальненням диз'юнкції. Зауважимо тепер, що порядок отримання заперечення висловлювань з кванторами є узагальненням законів де Моргана.

Приклад. Розглянемо дві двоелементні множини $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{y_1, y_2\}$ і двомісний предикат $P(x, y)$, заданий на $A \times B$. Тоді висловлювання

$$\forall x \in A\ \ \exists y \in B \quad P(x, y) \qquad (*)$$

означає, що для x_1 хоча б один із двох елементів y_1, y_2 підійде, і для x_2 хоча б один із двох елементів y_1, y_2 підійде. Це можна записати як

$$\Big(P(x_1, y_1) \vee P(x_1, y_2)\Big) \wedge \Big(P(x_2, y_1) \vee P(x_2, y_2)\Big). \qquad (**)$$

А заперечення висловлювання $(*)$, тобто

$$\exists x \in A\ \forall y \in B\ \ \overline{P(x, y)},$$

можна записати як

$$\Big(\overline{P(x_1, y_1)} \wedge \overline{P(x_1, y_2)}\Big) \vee \Big(\overline{P(x_2, y_1)} \wedge \overline{P(x_2, y_2)}\Big),$$

що можна отримати, застосувавши закон де Моргана до $(**)$.

Що можна і чого не можна робити з кванторами

Розглянемо вираз, у якому два квантори (для більшої кількості кванторів міркування аналогічні).

Не можна міняти квантори місцями

1. Якщо квантори різні, то, взагалі кажучи, їх не можна міняти місцями. Приклад: висловлювання

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \ \exists y \in \mathbb{N}\ \ y > x \qquad (1)$$

стверджує, що для будь-якого натурального числа знайдеться більше натуральне число (і це правда), а висловлювання

$$\exists y \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in \mathbb{N}\ \ y > x \qquad (2)$$

стверджує, що знайдеться натуральне число, яке більше, ніж усі натуральні числа (і це неправда). Різниця полягає в тому, що у висловлювання (1) елемент y вибирається в залежності від x (для кожного x існує свій y), а у висловлюванні (2) сказано, що такий y один і той самий для всіх x.

Те, що різні квантори не можна міняти місцями, можна побачити і на дуже простому прикладі, коли предикат двох змінних визначений на скінченній множині. Нагадаємо, що предикат загальності є узагальненням кон'юнкції, а предикат існування є узагальненням диз'юнкції.

Отже, нехай предикат $P(x, y)$ заданий на множині $\{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2\}$. Тоді висловлювання $''\forall x\ \exists y\ P(x, y)''$ можна записати так:

$$(P(x_1, y_1) \vee P(x_1, y_2)) \wedge (P(x_2, y_1) \vee P(x_2, y_2)),$$

а висловлювання $''\exists y\ \forall x\ P(x, y)''$ можна записати так:

$$(P(x_1, y_1) \wedge P(x_2, y_1)) \vee (P(x_1, y_2) \wedge P(x_2, y_2)).$$

Зрозуміло, що ці висловлювання, взагалі кажучи, різні (наприклад, вони мають різні значення, якщо $P(x_1, y_1) = P(x_2, y_2) = 1$, $P(x_1, y_2) = P(x_2, y_1) = 0$).

Зауваження. Може бути так, що після того, як в істинному висловлюванні поміняли місцями квантори, отримаємо знов істинне висловлювання. Але все одно «за змістом» воно буде іншим.

2. Якщо квантори однакові, то їх можна міняти місцями, і зміст виразу не зміниться. Приклад:

$$''\exists x \in \mathbb{N}\ \ \exists y \in \mathbb{N}\ \ x < y''\ =\ ''\exists y \in \mathbb{N}\ \ \exists x \in \mathbb{N}\ \ x < y'';$$

$$''\forall x \in \mathbb{N}\ \ \forall y \in \mathbb{N}\ \ x + y > 0''\ =\ ''\forall y \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in \mathbb{N}\ \ x + y > 0''.$$

Не можна вносити квантори в дужки

3. Слід ретельно відстежувати структуру предиката при переформулюванні виразів. Приклад: висловлювання

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \ (2 \mid x)\ \vee\ (2 \nmid x) \tag{3}$$

стверджує, що кожне натуральне число є парним або є непарним (це правда). А висловлювання

$$(\forall x \in \mathbb{N}\ \ (2 \mid x))\ \vee\ (\forall x \in \mathbb{N}\ \ (2 \nmid x)) \tag{4}$$

стверджує, що або всі натуральні числа є парними, або всі натуральні числа є непарними (це неправда). Різниця – у структурі висловлювань (3) і (4). Висловлювання (3) має вигляд $\forall x\ P(x)$, де $P(x) = \ ''(2 \mid x)\ \vee\ (2 \nmid x)''$. А висловлювання (4) має вигляд

$$(\forall x\ \ P(x)) \vee (\forall x\ \ Q(x)),$$

де $P(x) = \ ''2 \mid x''$, $Q(x) = \ ''2 \nmid x''$. Тут два квантори, і кожний зв'язує свою змінну. Тобто буква x в частині $(\forall x\ P(x))$ і буква x в частині $(\forall x\ Q(x))$ позначають не одну й ту саму, а різні змінні! Щоб побачити це ще ясніше, можна замінити позначення для одної з них і записати висловлювання (4) так:

$$(\forall x\ P(x)) \vee (\forall y\ Q(y)).$$

Тобто (4) – це диз'юнкція двох висловлювань: перше $\forall x\ \ P(x)$ (хибне), друге $\forall x\ Q(x)$ (теж хибне).

Зв'язок операцій над множинами і логічних операцій

Розглянемо універсальну множину I і множину всіх її підмножин. Тепер для кожної підмножини A визначимо предикат з предметною областю I, що задається правилом:

$$P(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A, \\ 0, & \text{якщо } x \notin A \end{cases} \qquad (!)$$

(нагадаємо, що тут 1 означає істину, а 0 – брехню).

Можна навпаки – розглянути множину всіх одномісних предикатів з предметною областю I і для кожного предиката $P(x)$ задати множину

$$A = \{x \in I : P(x)\}, \qquad (!!)$$

тобто множину таких $x \in I$, на яких цей предикат істинний.

Тоді неважко перевірити, що:

– якщо за множиною A побудували предикат $P(x)$ за правилом (!), а потім за цим предикатом побудували множину за правилом (!!), то вийде вихідна множина A;

– якщо за предикатом $P(x)$ побудували множину A за правилом (!!), а потім за цією множиною побудували предикат за правилом (!), то вийде вихідний предикат $P(x)$.

Таким чином, ми задали взаємно однозначну відповідність між множиною підмножин I і множиною предикатів, заданих на I.

Зв'язок між операціями над множинами і логічними операціями

Розглянемо два довільні предикати $P(x)$ і $Q(x)$. Нехай предикату $P(x)$ відповідає множина A, а предикату $Q(x)$ відповідає множина B. Тоді:

(а) предикату $R(x) = P(x) \wedge Q(x)$ відповідає множина $C = A \cap B$, тобто

$$\{x \in I : P(x) \wedge Q(x)\} = \{x \in I : P(x)\} \cap \{x \in I : Q(x)\};$$

(б) предикату $R(x) = P(x) \vee Q(x)$ відповідає множина $C = A \cup B$, тобто

$$\{x \in I : P(x) \vee Q(x)\} = \{x \in I : P(x)\} \cup \{x \in I : Q(x)\};$$

(в) предикату $R(x) = \neg P(x)$ відповідає множина $C = \overline{A}$, тобто

$$\{x \in I : \neg P(x)\} = \overline{\{x \in I : P(x)\}};$$

(г) якщо для будь-якого $x \in I$ істинна імплікація $P(x) \Rightarrow Q(x)$, то $A \subset B$.

Мають місце і обернені твердження. Розглянемо дві довільні множини $A, B \subset I$; нехай множині A відповідає предикат $P(x)$, а множині B відповідає предикат $Q(x)$. Тоді:

(а′) множині $C = A \cap B$ відповідає предикат $R(x) = P(x) \wedge Q(x)$;

(б′) множині $C = A \cup B$ відповідає предикат $R(x) = P(x) \vee Q(x)$;

(в′) множині $C = \overline{A}$ відповідає предикат $R(x) = \neg P(x)$;

(г′) якщо $A \subset B$, то для будь-якого $x \in I$ істинна імплікація $P(x) \Rightarrow Q(x)$.